สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

รูปทั่วไป ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$a\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + d\frac{\partial\phi}{\partial x} + e\frac{\partial\phi}{\partial y} + f\phi + g = 0$$

ในเบื้องต้น จะสมมติให้ สมการ มีพจน์ a, b, c, d, e, f และ g เป็น ค่าคงที่

ผลเฉลย $\phi = \phi(x, y)$ ซึ่งจะอยู่ในรูปของ ผลเฉลย

ของ สมการ เส้น ซึ่งมี ผลเฉลย ในรูป characteristic equation เป็น

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

โดย ราก ของ สมการ สามารถ หาได้ จาก

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

characteristic eq.

หา ลักษณะ ชนิด ของ สมการ PDEs. โดยใช้ รากของสมการ ข้างต้น (λ)

เราสามารถ แยก ชนิดของ สมการ PDEs ได้ดังนี้

หาก

$b^2-4ac > 0$, λ เป็นราก ของจำนวนจริง 2 ค่า $\Rightarrow$ Hyperbolic

$b^2-4ac = 0$ λ เป็นรากของ จำนวน จริง 1 ค่า $\Rightarrow$ Parabolic

$b^2-4ac < 0$, λ เป็นรากของ จำนวน เชิงซ้อน 2 ค่า $\Rightarrow$ Elliptic

ตัวอย่าง ของ สมการ เชิง อนุพันธ์ ย่อย อันดับ สอง

1. $\alpha^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial\phi}{\partial t}$ $\Rightarrow$ Diffusion eq.

   $\Rightarrow$ Parabolic eq.

2. $c^2 \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ $\Rightarrow$ Wave eq.

$\Rightarrow$ Hyperbolic eq.

3. $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ $\Rightarrow$ Laplace eq.

$\Rightarrow$ Elliptic eq.

วิธีการ แก้สมการ PDEs $\Rightarrow$ โดยใช้ Separation of Variables

- Separation of Variables Method

พิจารณา สมการ PDEs ดังกล่าว

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

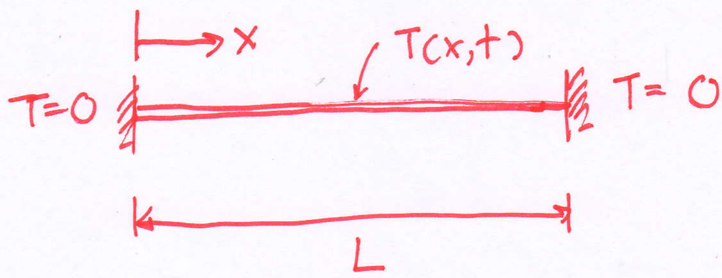
ผลเฉลย $T = T(x,t)$

$$T(x,t) = G(t) \cdot H(x)$$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

เป็นสมการ นำความร้อน 1 มิติ บนเส้นลวด ความยาว L



Boundary conditions : $x = 0$, $T = 0$

$x = L$, $T = 0$

Initial condition : $t = 0$, $T = 20\,^\circ C$

วิธีทำ

กำหนดให้ ผลเฉลย $T(x,t)$ เป็นผลเฉลยในรูปของผลคูณประกอบย่อย 2 ส่วนคือ

$$T(x,t) = G(t) \cdot H(x)$$

แทนผลเฉลยในสมการควบคุม (Governing equation)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[G(t) \cdot H(x)\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[G(t) \cdot H(x)\right]$$

$$H(x) \frac{\partial}{\partial t} G(t) = G(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x)$$

$$\frac{1}{G(t)} \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{H(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x)$$

$$\frac{1}{G(t)} G'(t) = \frac{1}{H(x)} H''(x)$$

จากพิจารณาสมการข้างต้น เทอมด้านซ้ายจะเป็นฟังก์ชันของ t เท่านั้น และเทอมด้านขวาเป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น ซึ่งกรณีที่จะทำให้สมการข้างต้นเป็นจริง คือ ค่าของเทอมด้านซ้ายและขวาต้องเป็นค่าคงที่

$$\frac{1}{G(t)} G'(t) = \frac{1}{H(x)} H''(x) = -\lambda^2$$

แยกเป็นสมการทีละสมการ

$$\frac{1}{G(t)} G'(t) = -\lambda^2$$

$$\frac{1}{H(x)} H''(x) = -\lambda^2$$

พิจารณา $\frac{1}{G(t)} G'(t) = -\lambda^2$

$$\frac{1}{G(t)} \frac{dG(t)}{dt} = -\lambda^2 \quad \Rightarrow G(t) = ?$$

$$\int \frac{1}{G}\, dG = \int -\lambda^2 . dt$$

$$\ln G = -\lambda^2 t + c_1$$

$$e^{\ln G} = e^{-\lambda^2 t + c_1} = e^{-\lambda^2 t} \cdot e^{c_1} = c_2$$

$$G(t) = c_2 e^{-\lambda^2 t} \quad ; \quad A = c_2$$

$$\boxed{G(t) = A e^{-\lambda^2 t}}$$

พิจารณา $\frac{1}{H(x)} H''(x) = -\lambda^2$

$$\frac{1}{H(x)} \frac{d^2 H(x)}{dx^2} = -\lambda^2$$

$$\frac{d^2 H(x)}{dx^2} + \lambda^2 H(x) = 0$$

$$H'' + \lambda^2 H = 0$$

จาก characteristic eq. : $\sigma^2 + \lambda^2 = 0$

$$\sigma^2 = -\lambda^2$$

$$\sigma^2 = +\lambda^2 i^2 \quad ; \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\sigma = \pm \lambda i$$

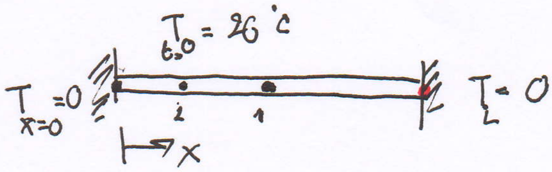
$$H(x) = B e^{0x} \sin \lambda x + D e^{0x} \cos \lambda x$$

$T(x,t) = G(t) \cdot H(x)$

$$H(x) = B\sin\lambda x + D\cos\lambda x$$

$T(x,t) = G(t) \cdot H(x)$

พิจารณา Boundary conditions



1. $x = 0, \quad T = 0$

$$T(x,t) = G(t) \cdot H(x)$$

$$T(0,t) = \underbrace{G(t)}_{\neq 0} \cdot H(0) = 0$$

$$\therefore \quad H(0) = 0$$

จาก ผลเฉลย ของ $H(x)$

$$H(x) = B\sin\lambda x + D\cos\lambda x$$

$$H(0) = B\underbrace{\sin\lambda \times 0}_{=0} + D\underbrace{\cos\lambda \times 0}_{=1} = 0$$

$$\boxed{D = 0}$$

ผลเฉลย

$$H(x) = B\sin\lambda x$$

2. $x = L, \quad T = 0$

$$T(L,t) = 0$$

$$G(t) \cdot H(x) = 0$$

$$\underbrace{G(t)}_{\neq 0} \cdot H(L) = 0$$

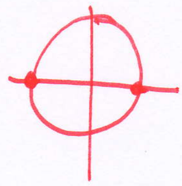
$$\therefore \quad H(L) = 0 \checkmark$$

$$H(x) = B\sin\lambda x$$

$$H(L) = B\sin\lambda L = 0$$

$$B\sin\lambda L = 0 \qquad ; \; B \neq 0, \; \lambda \neq 0$$

$$\sin\lambda L = 0$$



$$\lambda L = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

$$\lambda = \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \frac{3\pi}{L}, \ldots$$

พิจารณา ค่า λ ในรูปของ n

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \qquad ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

ดังนั้น ตอนนี้ เราจะได้ ผลเฉลย อยู่ในรูป

$$T(x,t) = G(t) \cdot H(x)$$

$$T(x,t) = A e^{-\lambda^2 t} B\sin\lambda x$$

$$= K e^{-\lambda^2 t} \sin\lambda x \qquad ; \; K = AB = \text{ค่าคงที่}$$

เนื่องจาก ค่า λ มีหลายค่า จึงทำให้ ผลเฉลย มีหลายคำตอบ เช่น

$$T_1(x,t) = K_1 e^{-\lambda_1^2 t} \sin\lambda_1 x \qquad ; \; \lambda_1 = \frac{\pi}{L}$$

$$T_2(x,t) = K_2 e^{-\lambda_2^2 t} \sin\lambda_2 x \qquad ; \; \lambda_2 = \frac{2\pi}{L}$$

$$\vdots$$

$$T_n(x,t) = K_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin\lambda_n x \qquad ; \; \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

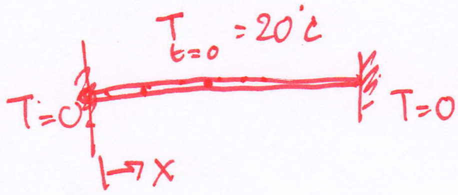
นำผลเฉลยของแต่ละโหมด n มารวมกันแบบเชิงเส้น

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x \quad ; \quad \tilde{c}_n = c_n k_n$$

c_n = เป็นค่าคงที่ที่เกิดจากการรวมแบบเชิงเส้น

เพื่อหาค่า $\tilde{c}_n$ เราจะพิจารณา เงื่อนไขเริ่มต้น

เมื่อ $t=0$, $\boxed{T = f(x)} = 20\ ^\circ C$



เพื่อให้การแก้ปัญหาง่ายขึ้น จะสมมติให้

$$x = \frac{1}{2} \quad , \quad L = 1$$

พิจารณาเทอม

$$\sin \lambda_n x = \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\sin \frac{n\pi}{1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sin \frac{n\pi}{2} \quad ; n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} = 1 + 0 - 1 + 0 + \ldots$$

$$= 0$$

จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยที่ได้จากการแทนเงื่อนไขเริ่มต้น อาจทำให้ผลเฉลยที่ได้ไม่มีประโยชน์ ($T(x,t) = 0$) ดังนั้นเพื่อเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดปัญหาในลักษณะนี้ จึงจำเป็นต้องคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $\sin \lambda_n x$ ซึ่งเรียกการดำเนินการแบบนี้ว่า "Orthogonality"

$$T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \underbrace{e^{-\lambda_n (0)}}_{=1} \sin \lambda_n x$$

$$T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \sin \lambda_n x$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \sin \lambda_n x$$

Orthogonality

$$f(x) \sin \lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n (\sin \lambda_n x)(\sin \lambda_n x)$$

การหา ค่า $\tilde{c}_n$ สามารถทำได้ โดย การ อินทิเกรต สมการ ตลอด ช่วงความยาว $x=0$ ถึง $x = L$

$$\int_0^L f(x)(\sin \lambda_n x)\,dx = \int_0^L \tilde{c}_n \sin^2 \lambda_n x \, dx$$

พิจารณา เทอม

$$\int_0^L \sin^2(\lambda_n x)\,dx = ?$$

กำหนด $u = \lambda_n x$ | $x = 0,\ u = 0$

$$\frac{du}{dx} = \lambda_n \qquad x = L,\ u = \lambda_n L$$

$$dx = \frac{1}{\lambda_n} du$$

$$\int_0^L \sin^2(\lambda_n x)\,dx = \int_0^{\lambda_n L} \frac{\sin^2 u}{\lambda_n}\,du$$

$$\int_0^{\lambda_n L} \frac{\sin^2 u}{\lambda_n}\,du = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\lambda_n L} \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)\,du$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n} \int_0^{\lambda_n L} [1 - \cos(2u)]\, du$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n} \left[u - \frac{\sin(2u)}{2} \right]_0^{\lambda_n L}$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n} \left\{ \left[\lambda_n L - \frac{\sin(2\lambda_n L)}{2} \right] - \left[0 - \frac{\sin 0}{2} \right] \right\}$$

$$\frac{\sin(2\lambda_n L)}{2} = \frac{1}{2}\sin(2\lambda_n L)$$

$$-\frac{1}{2}\sin\left(2 \frac{n\pi}{L} \times L\right) = 0$$

$$\int_0^L \sin^2(\lambda_n x)\, dx = \frac{L}{2}$$

พิจารณา เทอม

$$\int_0^L f(x) \sin(\lambda_n x)\, dx \Rightarrow \text{ถ้า } f(x) = \text{ค่าคงที่}$$

$$f(x) \int_0^L \sin(\lambda_n x)\, dx = f(x) \left[-\frac{\cos(\lambda_n x)}{\lambda_n} \right]_0^L$$

$$= f(x) \left[-\frac{\cos(\lambda_n L)}{\lambda_n} - \frac{(-\cos 0)}{\lambda_n} \right]$$

$$= f(x) \left[\frac{1 - \cos \lambda_n L}{\lambda_n} \right]$$

จาก

$$\int_0^L f(x) \sin(\lambda_n x)\, dx = \tilde{c}_n \int_0^L \sin^2(\lambda_n x)\, dx$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

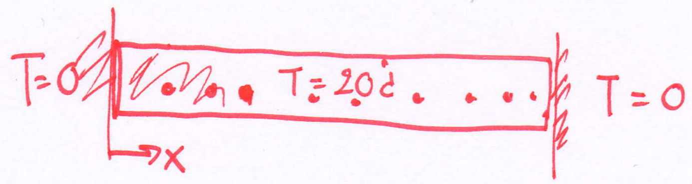
$$f(x) \left[\frac{1 - \cos \lambda_n L}{\lambda_n} \right] = \tilde{c}_n \frac{L}{2}$$

$$\tilde{c}_n = \frac{2}{L} f(x) \left[\frac{1 - \cos(\lambda_n L)}{\lambda_n} \right]$$

ผลเฉลยสุดท้าย คือ

$$T(x,t) = \frac{2}{L} f(x) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - \cos(\lambda_n L)}{\lambda_n} \right] e^{-\lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n x)$$

โดยที่ $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$



Unsteady 1D Heat conduction.

Quiz

จงใช้วิธี Separation of Variables หาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$T(x,y) = G(x)\,H(y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x) H(y) + \frac{\partial^2 G(x) H(y)}{\partial y^2} = 0$$

$$H(y) \frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} + G(x) \frac{\partial^2 H(y)}{\partial y^2} = 0$$

$$H(y) \frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} = - G(x) \frac{\partial^2 H(y)}{\partial y^2}$$

$$\frac{1}{G(x)} \frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} = - \frac{1}{H(y)} \frac{\partial^2 H(y)}{\partial y^2}$$

$$\frac{1}{G(x)} G''(x) = - \frac{1}{H(y)} H''(y)$$

สรุปได้ ทั้งสองฝั่ง ต้องเป็นค่าคงที่ $(= -\lambda^2)$

① $$\frac{1}{G(x)} G''(x) = - \lambda^2$$

② $$-\frac{1}{H(y)} H''(y) = -\lambda^2$$

① : $$\frac{1}{G(x)} G''(x) + \lambda^2 = 0$$

$$G''(x) + \lambda^2 G(x) = 0$$

$$G(x) = \text{-----}$$

② :

$$-\frac{1}{H(y)} H''(y) = -\lambda^2$$

$$H''(y) - \lambda^2 H(y) = 0$$

$$H(y) = \ldots$$

$$T(x,t) = \frac{2}{L} f(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1-\cos(\lambda_n L)]}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n x)$$

x=0.5		x=0.1	
Time	Temp	Time	Temp
0	19.99	0	19.98
0.1	9.49	0.1	2.93
0.2	3.54	0.2	1.09
0.3	1.32	0.3	0.41
0.4	0.49	0.4	0.15
0.5	0.18	0.5	0.06
0.6	0.07	0.6	0.01
0.7	0.03	0.7	0
0.8	0.01	0.8	0
0.9	0	0.9	0
1	0	1	0